SIGNIFICADO Y ALCANCE DEL TEOREMA DE GOEDEL

Carlos Raitzin

El presente trabajo tiene por único objetivo exponer en forma simple las ideas fundamentales de la concepción geodeliana junto con algunas de sus consecuencias sin pretensiones de rigor formal.

Queremos agradecer aquí a nuestro fallecido maestro Prof. Dr. Agustín Durañona y Vedia como también al R.P. A. Knaak Peuser, quienes en su momento tuvieron la bondad de leer el manuscrito y hacernos llegar sus estimulantes comentarios.

I. Algunas consideraciones sobre la formalización de la Matemática. Antecedentes históricos

Se suele atribuir a D. Hilbert la introducción del método axiomático en la Matemática, aun cuando en rigor el primero de tales intentos, si bien parcial, se remonta por lo menos a Euclides. En efecto fue indiscutible la prioridad de este último al edificar la Geometría en sus célebres "Elementos" sobre la base de un sistema de postulados que han conservado plena vigencia hasta hoy.

Las ventajas de una empresa tal son evidentes, al menos aparentemente. El Formalismo Axiomático permite, renunciando a toda incursión metafísica y eludiendo de este modo todo problema de este carácter, estructurar un sistema lógico en forma harto elegante sobre la base de un cierto número de proposiciones más o menos evidentes. Esto parecería colmar el viejo sueño de los Filósofos escolásticos los cuales, según una frase feliz de nuestro maestro J. Rey Pastor, "pretendían edificar el saber humano en pirámide, de la cual brotaran en cascada todas las verdades".

Hasta aquí las ventajas de una tal estructuración de la Ciencia pero, lamentablemente, existen muy serias limitaciones que distan, por otra parte, de ser evidentes. Estas últimas, que constituyen el objeto principal de esta monografía, fueron puestas de manifiesto en un trabajo de singular importancia del matemático vienés Kurt GOEDEL, quien alcanzó merecida celebridad a raíz de la publicación del mismo.

Conviene, pues hace a nuestro asunto, remontarse hasta los orígenes del movimiento logístico, a fines del Siglo XIX. Comenzaremos en consecuencia con una breve nota histórico-crítica, a fin de poder colocar los resultados de GOEDEL en una justa perspectiva.

La introducción en la Matemática del infinito actual, completo y realizado por parte de G. CANTOR y sus continuadores, estremeció a la Reina de las Ciencias al dar lugar a la aparición de una serie de paradojas. Estas, desde luego, no eran nuevas en esencia, pero su análisis y tratamiento lógico satisfactorio se hizo entonces impostergable.

Esta urgencia se debía a que el movimiento logístico, triste epílogo de la concepción cantoriana, pretendía fundamentar todo el edificio de la Matemática sobre base lógica, con el empleo de los métodos propios de esta última disciplina.

Esta corriente de pensamiento tuvo como iniciador a G. PEANO, continuando su obra B. RUSSELL, WHITEHEAD, COUTURAT y otros. Y a la par de éstos surgieron ardientes detractores de la misma, entre los que no puede dejar de mencionarse a Henri POINCARE.

A este último se deben algunas de las más lúcidas y feroces críticas de la logística, sus métodos y sus notaciones peculiares[2].

La principal preocupación de los logísticos, sobre todo a partir de la monumental obra "Principia Mathematica" de RUSSELL y WHITEHEAD era fundamentar axiomáticamente la Matemática en forma tal que se evitara la aparición de las paradojas conocidas o de otras nuevas. Entre las primeras figuraba una muy célebre, descubierta por RUSSELL mismo, y que constituyó un verdadero golpe de gracia para el ingente sistema lógico de G. FREGE, el que resultó inadecuado para la elucidación de esta antinomia. Es la siguiente: "Sea un conjunto x tal que siendo x otro conjunto cualquiera, x está incluido en x cuando y sólo cuando x es un conjunto que **no** se contiene a sí mismo".

En otras palabras, se trata del conjunto de todos los conjuntos que **no** se contienen en sí mismos.

Suponiendo la existencia de este conjunto X cabe preguntarse si se contiene o no se contiene a sí mismo. Supongamos la primera posibilidad, es decir que X se contiene a sí mismo. Pero en tal caso no cumple con lo impuesto por su definición y, en consecuencia, **no** se contiene. En el segundo caso, al **no** contenerse debe figurar por definición como subconjunto de sí mismo en cuyo caso **sí** se contiene.

Adoptando ambas hipótesis resulta una contradicción y, al mismo tiempo, X es y no es parte de sí mismo.

Para evitar este tipo de dificultades RUSSELL y WHITEHEAD elaboraron la "**doctrina de los tipos lógicos**" que era originalmente muy compleja pero cuyas ideas fundamentales se pueden exponer en términos muy simples. Se trata simplemente de clasificar las entidades a las que se refiere la teoría de conjuntos, refiriéndose sucesivamente a elementos simples, conjuntos, conjuntos de conjuntos*, conjuntos de conjuntos de conjuntos, etc.

Al tipo (n + 1) pertenecerán como elemento entidades del tipo (n). La distinción o salvedad consiste en que no es lícito hablar de tipos que contengan como elementos miembros de tipos distintos al de orden inmediatamente inferior al suyo propio. La teoría de los tipos no niega la existencia de conjuntos que no satisfagan esta exigencia: simplemente se refiere a los mismos en forma muy peculiar. En efecto, al respecto postula que las proposiciones que intentan señalar la pertenencia o membrecía de elementos o entidades de tipo dado en otros tipos que no sean del orden inmediato superior son in-sensatas, aún cuando aparentemente pudieran tener sentido.

Desde luego esto no era más que un artificio para evitar la aparición de paradojas y por lo tanto, la pretensión de los autores de que la teoría de los tipos resultaba evidente en sí misma nos parece hoy injustificada pues la misma no presenta en absoluto tal característica.

II. La formalización de un sistema deductivo según HILBERT. Matemática y Metamatemática

La axiomática, tal como fuera edificada por D. HILBERT y su escuela, establece cuáles son las condiciones o propiedades que debe poseer un sistema de postulados. Las mismas son:

1º. **No contradicción:** las consecuencias lógicas de un sistema de postulados no deben ser contradictorias entre sí (según los textos, esto también suele denominarse compatibilidad, coherencia, o consistencia).

2º. **Integridad:** todas las propiedades conocidas dentro de una rama de la ciencia deben resultar demostrables o refutables a partir del sistema adaptado de postulados para fundamentar axiomáticamente la misma (también denominada, propiedad de saturación).

3º. **Independencia:** no podrá deducirse ninguno de los postulados del sistema como consecuencia de los restantes.

4º. **Resolubilidad:** (problema de la decisión): permite decidir para toda proposición si ella es derivable (demostrable) dentro del sistema o no. Resulta muy arduo el problema de establecer a priori si un sistema de axiomas dado verifica cada una de las propiedades de HILBERT.

En particular nos ocuparemos aquí del problema de la compatibilidad

* A un conjunto cuyos elementos son conjuntos se lo denomina normalmente clase.

por ser ello necesario para lograr mayor claridad en los desarrollos posteriores. Al estudiar este problema, HILBERT mismo propuso la clasificación de las posibles demostraciones de compatibilidad de un sistema dado en **absolutas y relativas.**

En el segundo caso, la no contradicción resultaría de la compatibilidad de otro sistema de postulados, mientras que en el caso de una demostración absoluta de compatibilidad, ésta resultaría en forma que podríamos denominar "intrínseca" sin necesidad de recurrir a otros sistemas axiomáticos.

Es aquí donde corresponde introducir, siguiendo a HILBERT, la noción de **formalización completa de un sistema deductivo.**

Se trata de despojar de todo significado las expresiones que aparecen en el sistema, considerando a las mismas únicamente como signos. Desde luego, resultaría necesario enunciar un sistema completo de reglas operativas perfectamente definidas para combinar y manipular dichos signos o símbolos desprovistos de significado*.

Al conjunto de signos y reglas operativas se lo denomina un **cálculo.**

Vemos que lo que usualmente denominamos fórmulas serán ahora cadenas de signos "sin significado intrínseco" pero obedecen a reglas precisas en su formación. Tales cadenas se combinarán con otras o con conjuntos de cadenas, de acuerdo a tales reglas, en correspondencia con la deducción de teoremas a partir de los axiomas adaptados. NAGEL y NEWMAN[4] comparan acertadamente este proceso con el diseño abstracto de un mosaico o tapiz: una página llena de tales símbolos "no afirma nada" pues, como se ha dicho, los mismos no tienen significado. No obstante, tal cosa tiene un objetivo y es revelar con claridad la estructura formal del sistema, eliminando de antemano el peligro de introducir modos o formas de razonamiento no controladas de antemano. Lograda tal estructuración de "cadenas", podremos, evidentemente, formular observaciones o comparaciones entre ellas y, así como el sistema construido **carecía de significado**, las relaciones entre cadenas **lo tendrán.** Ejemplos de este último tipo de relaciones serían enunciados de este tipo: "esta cadena está formada por las tres anteriores", "esta cadena es igual a la siguiente salvo un signo", etc. Por supuesto, estas sentencias no pasan (ni se proponen otra cosa que) de ser una ejemplificación, quedando la justificación de su uso para más adelante.

Llegamos así al punto en que podemos efectuar una distinción neta entre Matemática y Metamatemática. Las relaciones con significado entre cadenas de un sistema (formalizado) "sin él" pertenecen a lo que HILBERT deno-

* Esta suposición provisoria resultará justificada más adelante en cuanto a su utilidad.

minó Metamatemática o aun Metalógica. Conviene insistir respecto de este asunto.

Podemos asociar la idea de Metalógica a la de Metalengua en el sentido siguiente: supongamos que estamos hablando de propiedades matemáticas empleando la lengua castellana. En este caso, la propiedad matemática en sí viene expresada en un lenguaje, que es la lengua objetiva y el castellano constituye el meta-lenguaje. Lo mismo podría afirmarse de una gramática latina escrita en francés. En este caso el francés sería la meta-lengua empleada.

Si escribo

"2 + 3 = 5"

tengo una expresión matemática. Pero si en lugar de ello escribo:

"2 + 3 = 5 es una expresión aritmética"

tengo una expresión metamatemática, como también en el caso siguiente:

"Si empleo el signo = es una expresión, a diestra y siniestra debo colocar expresiones numéricas y/o literales".

Consideramos suficientes estos ejemplos tomados de las obras de NAGEL y NEWMAN[4] y BECKER[5], los que, evidentemente, podrían multiplicarse indefinidamente. Lo que importa aquí es establecer claramente tal distinción de niveles lógicos, lo que resulta imprescindible para lo que sigue.

III. La paradoja de RICHARD

Llegamos a esta altura a un punto esencial de esta exposición introductoria. Es aquí donde comenzará a resultar tan evidente como necesaria la distinción de niveles lógicos previamente efectuada al introducir las nociones de Metamatemática, Metalógica y Metalenguaje.

Se trata de la famosa paradoja semántica de JULES RICHARD[3] que fuera posteriormente empleada por GOEDEL, con adecuadas modificaciones, en el célebre trabajo que nos ocupa. Esta paradoja, destinada a tener eco, contenía una antinomia de tipo semántico y, como componentes esenciales, no sólo aspectos gnoseológicos (tales como verdad, demostrabilidad, etc.) sino también lingüísticos (gramática, teoría de la significación, síntaxis).

Expondremos la misma en la forma simplificada debida a POINCARE[2], dando luego una versión algo más sofisticada y general que se presta mejor a nuestros fines.

Consideremos todos los números decimales (expresados en sistema decimal) que se pueden definir con la ayuda de un número finito de palabras (empleando la lengua castellana u otra cualquiera bien definida y fijada). Estos números materiales forman un conjunto E y es fácil ver que este conjunto es **numerable**, es decir, que se pueden numerar los elementos del mismo desde el uno hasta el infinito.

Supongamos que esta numeración se ha efectuado y definamos un número N de la manera siguiente: si la n-ésima cifra decimal del n-ésimo número del conjunto E es

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

la n-ésima cifra decimal de N será respectivamente

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$$

Como se ve, N no es igual al nésimo número de E y, como n es cualquiera, **N no pertenece a E** y, por lo tanto, **N deberá pertenecer a este conjunto** pues lo hemos definido como auxilio de un número finito de palabras.

Veamos la explicación de esta antinomia. E es el conjunto de todos los números que se pueden definir por medio de un número finito de palabras **sin** introducir la noción del conjunto E mismo. Sin esta salvedad, la definición de E contendrá un círculo vicioso: no se puede definir E en base al conjunto E mismo.

Según esto hemos definido N mediante un número finito de palabras: el inconveniente es que para ello nos hemos apoyado en la noción de conjunto E. **Por esto es que N no forma parte de E.**

Veremos ahora, de acuerdo a lo enunciado, una forma de exposición de esta célebre antinomia debida a MOSTOWSKI[7].

Consideremos **definiciones de propiedades de números naturales** expresables en un idioma determinado (castellano u otro) y empleando eventualmente un determinado conjunto de símbolos matemáticos. Estas definiciones pueden ordenarse, pues forman un conjunto numerable (o sea, que puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales).

Para ordenar las definiciones (o bien numerarlas) procedemos como sigue:

1) Se las agrupa por número total de letras y símbolos que emplean.
2) A igual número de letras y signos de dos definiciones se las coloca en orden lexicográfico del mismo modo que en un diccionario.

Resulta así una sucesión de definiciones de propiedades de números naturales.

$$W_1, W_2, W_3, \dots, W_n, \dots$$

Para dar un ejemplo

"Ser número par"

tiene doce letras y habría que ubicarla en orden lexicográfico entre las definiciones de propiedades de doce letras.

Considerado ahora un número n natural cualquiera dado y formada la sucesión completa $\{W_n\}$ (n = 1,2,3, ...) podemos preguntarnos si n posee la propiedad W_p (para el ejemplo si n es par). De verificarse la propiedad diremos que "W_p (n) es verdadera" y en el otro caso que "W_p (n) es falsa" o bien "no-W_p (n) es verdadera". Como n y p han sido elegidos arbitrariamente podemos ahora analizar la hipótesis:

$$p = n$$

Supongamos que tengamos "W_n (n) es falsa" o sea "no-W_n (n) es verdadera" con n arbitrario **no fijado**. Pero ésta es una propiedad de un número natural y habrá de figurar en **nuestra** sucesión $\{W_n\}$.

Si "no-W_n (n) es verdadera" diremos que n es un número natural **richardiano.** Esta propiedad **richardiana** es la que ha de figurar en nuestra sucesión ya formada $\{W_n\}$ y le corresponderá un cierto número de orden digamos q. Esto significa

"W_q (n) equivale a no-W_n (n)"

Como n **no estaba fijado**, hagamos ahora n=q, lo cual es lícito por esa razón.

Queda:

"W_q (q) equivale a no-W_q (q)"

que es una contradicción.

La resolución de esta paradoja antinómica resulta de la separación tajante entre **lengua primitiva** (lenguaje objetivo) y **metalengua.**

La metalengua es el lenguaje con el que se habla **sobre** el lenguaje objetivo o primitivo, es decir es **otro nivel de lenguaje.**

Para aclarar esto demos un ejemplo: supongamos una gramática china para lectores de habla castellana. Aquí, el chino es el lenguaje objetivo o primitivo y el castellano es la metalengua. La lengua objetiva se llama así porque es el objetivo de la metalengua.

Apliquemos ahora esta distinción a la paradoja de RICHARD. Resulta claro que la propiedad richardiana no pertenece a la lengua primitiva sino a la metalengua.

Lo que habíamos considerado era una peculiaridad semántica de la propiedad W_p de nuestro catálogo o sucesión, a saber que en aquella expresión o definición el índice es distinto de la variable n que figura en ella. Esto es, manifiestamente una propiedad o proposición metalingüística.

Por consiguiente, el predicado "richardiano" no pertenece a las propiedades numéricas introducidas en la sucesión de las W_n, o sea, no puede ser identificado con una W_q.

Con esto queda en claro el sofisma inherente a la línea de pensamiento de la paradoja de RICHARD.

IV. El teorema de GOEDEL (1906-1978)

En 1931 apareció el célebre trabajo de GOEDEL que nos ocupa[1].

El autor era un joven matemático de la Universidad de Viena, que contaba a la sazón 25 años de edad.

En este capítulo queremos señalar qué fue lo que demostró GOEDEL, dando idea del razonamiento que él siguiera. Nos conformaremos con un enfoque heurístico sin intentar dar aquí una demostración rigurosa, lo que estaría fuera de lugar. Lo que nos interesa es una visión a vuelo de pájaro para poder analizar en el próximo capítulo las consecuencias lógico-filosóficas de este resultado con un mayor conocimiento de causa.

Una exposición informal (aunque más detallada que la que aquí se expone basándose en[5] es debida a J.B. ROSSER[7]. Quien se interese en el aspecto del rigor deberá recurrir a[1] o al enjundioso volumen de LADRIERE[6].

El teorema de GOEDEL, llamado a veces de incomplección, establece lo siguiente:

En todo sistema formal de tipo axiomático (o sea, basado en un conjunto de axiomas o postulados) similar al sistema lógico-matemático introducido por RUSSELL y WHITEHEAD en su **principia mathematica**, existen proposiciones **formalmente** (es decir, **lógicamente**) indecidibles a partir de los axiomas adoptados.

En particular, entre estas proposiciones indecidibles se cuenta siempre la **compatibilidad*** (o no-contradicción del sistema).

La última parte del enunciado del teorema equivale a la afirmación de que **no se puede probar que el sistema no es contradictorio con los métodos lógicos que el sistema mismo proporciona.**

No debe confundirse la dificultad de hallar proposiciones indecidibles con las que resultan por ejemplo de la **no-integridad** de un sistema axiomático. En este último caso pueden existir cierto tipo de proposiciones que consideramos "**verdaderas**", dando a esta palabra el sentido de "**comodidad**" del que hablaba POINCARE, y que no resultan deducibles de un dado conjunto de axiomas y reglas lógicas. Tal es el caso, por ejemplo, del V Postulado (de las paralelas) euclidiano.

Este tipo de dificultad se creía remediar mediante la adjunción al sistema de nuevos postulados independientes del resto de los mismos. Por lo menos esto se pensaba hasta que se demostró el teorema objeto de esta monografía.

Aquí el problema es más serio pues se trata de la posible presencia de

* Por razones que luego se harán aparentes es tal vez preferible referirse a "**coherencia**".

antinomias del tipo considerado al analizar la paradoja de RICHARD. Es evidente que este caso, y en particular en lo que se refiere a la ausencia de contradicción, **nada se adelanta introduciendo nuevos axiomas.** Lo que se hace necesario es la introducción de nuevos niveles lógicos o metalógicos asociados, a los que ya nos hemos referido. GOEDEL mismo aludió a la posibilidad de resolver este problema introduciendo un número transfinito de niveles lógicos, pero esta idea no fue posteriormente desarrollada.

Resulta ahora absolutamente necesario, antes de seguir adelante, precisar el sentido que tiene la referencia al sistema axiomático de los PRINCIPIA MATHEMATICA (u otros similares) en el enunciado del teorema.

Esto evitará, tal vez, una **extrapolación errónea** de la validez del mismo.

La afirmación mencionada significa que GOEDEL se refirió **exclusivamente** en su razonamiento a los sistemas formales **lo bastante amplios como para contener la aritmética.**

Otra precisión indispensable que complementa lo dicho antes es la siguiente. Existen proposiciones aritméticas que no resulta posible demostrar en el estado actual de la Ciencia, como ser la conjetura de GOLDBACH o el último teorema de FERMAT. Supongamos que la adjunción de nuevos postulados a los usuales de la aritmética permitiera decidir si estas proposiciones son verdaderas o falsas. El teorema de GOEDEL establece que esto **nada remediaría** pues podrían existir otras proposiciones indecidibles en el marco del sistema formalizado ampliado y, en particular, la compatibilidad o coherencia del mismo no podría ser demostrada.

Entramos de lleno, tras estas consideraciones preliminares que juzgamos necesarias, en la exposición de las ideas que son el hilo conductor en la demostración de GOEDEL.

Esta es muy complicada y para llegar a ella es necesario, en su forma original, haber pasado por gran cantidad de definiciones y lemas.

Esta dificultad se refleja en los intentos de los divulgadores.

NAGEL y NEWMAN[4] precisan veinticinco páginas para una exposición heurística de la demostración göedeliana. El camino que seguiremos aquí, mucho más breve, está tomado de BECKER[5].

Recordando lo visto en III en relación a la paradoja de RICHARD, consideremos un sistema formal (S) en el que se incluyan las propiedades de los números positivos, estableciendo en (S) funciones proposicionales ("propositional functions") con la única variable cuyo conjunto de valores o rango sea el conjunto de los números naturales. Escribiremos estas proposiciones en forma ordenada empleando una lengua formalizada:

$$W_{1, 2}, \dots, W_n, \dots$$

Supongamos ahora, de nuevo, que n es **richardiano**, es decir

"n **no** posee la propiedad W_n",

o sea

"n posee la propiedad no-W_n (n)"

Debe recordarse que n es una **variable** que toma como valores los números naturales finitos.

Para **evitar hablar de proposiciones verdaderas** hablaremos de **proposiciones demostrables** en el sistema formalizado (S). El concepto de "**verdadero**" introduce dificultades no sólo en filosofía sino también en la lógica matemática por lo que se lo sustituye por otro más fácil de precisar. En consecuencia la propiedad **richardiana** será expresada

"W_n (n) **no** es demostrable en (S)"

Se trata ahora de identificar esta última con una de las W_i. En este aspecto reside principalmente el gran mérito de GOEDEL, quien idea para ello un artificio ingenioso denominado "**aritmetización de la Matemática**". Para evitar las imprecisiones que llevan, en el caso de la paradoja de RICHARD, a la confusión entre lenguaje y metalenguaje, GOEDEL creó un sistema de "traducción" de proposiciones lógicas que, consideradas bajo su aspecto externo únicamente, constituyen una sucesión **finita** de constantes y variables lógicas. Se trata de expresar estas sucesiones finitas mediante otras sucesiones finitas de **números naturales**, estableciendo una correspondencia biunívoca entre ambas. El método original de GOEDEL para efectuar esta traducción es complejo habiendo logrado posteriormente QUINE un procedimiento considerablemente más simple:

Signos lógicos	~ (no) ——	1
	^ (y) ——	2
Ambos paréntesis	(,) ——	3
	——	4
Signos aritméticos		
	= ——	5
	+ ——	6
	. ——	7
Variable equis:	x ——	8
Apóstrofe	' ——	9

('), (''), ('''), ... son los símbolos para los números 1, 2, 3, ... Con esto basta para desarrollar el cálculo aritmético-lógico y, en particular, la teoría de números. Pueden emplearse distintas variables mediante la codificación x', x'', ...

Vemos que con nueve símbolos se puede lograr una correspondencia biunívoca entre proposiciones lógico-matemáticas y sucesiones finitas de números naturales.

Por ejemplo

(x) (x=x) que expresa "Para todo x, x es igual a x" puede codificarse mediante la sucesión 38438584.

Si tenemos más de una expresión y existe un orden entre ellas, simplemente se escriben siguiendo el mismo las sucesiones correspondientes de cifras intercalando **ceros** entre ellas. Cuando queremos unir varios grupos del último tipo intercalamos **dos ceros** y así sucesivamente.

LORENZEN ("Formale Logik") ha logrado establecer análoga correspondencia biunívoca empleando únicamente las cifras 0 y 1.

Denominemos ahora T al conjunto de las sucesiones de números asociados a los teoremas* demostrables en el sistema formalizado(S).

Indiquemos con φ (n, p) "**el número de GOEDEL**" (obtenido de acuerdo al código visto antes) asociado a la proposición W_n (p).

Esto permite formular la propiedad **richardiana** expresando que φ (n, n) **no** pertenece al conjunto T, o bien, empleando la notación usual:

φ (n, n) $\notin$ T.

Esta es evidentemente una **proposición aritmética** pues φ (n, n) es un número y T un conjunto de números.

Por lo tanto, de acuerdo a su definición, existirá una proposición W_q en (S) que corresponde a la misma.

Ahora bien, como φ (n, n) $\notin$ T contiene una variable n, lo mismo sucederá con W_q.

Podemos, análogamente a lo hecho en el caso de la paradoja de RICHARD, introducir el número q en W_q, indicando con W_q (q) que q posee la propiedad expresada por W_q. Pero W_q es la expresión **formalizada** de:

(1) "W_n (n) **no** es demostrable en (S)".

Por consiguiente, dada la equivalencia entre (1) y (2)

(2) "φ (n, n) $\notin$ T",

tenemos que

"φ (q, q) $\notin$ T"

es equivalente a

"W_q (q) **no** es demostrable en (S)"

Este es el sentido intuitivo de W_q (q): **esta proposición afirma ella misma que es indemostrable.**

Se puede ahora probar que Wq (q) es **indecidible** en (S).

* Proposiciones.

En efecto si fuera **demostrable** sería correcta y, en consiguiente, **indemostrable** (pues ella misma afirma que lo es).

Si por el contrario, fuera **demostrable** su **negación**, o sea no-W_q (q) esta última sería correcta es decir W_q (q) sería refutable. Pero como W_q (q) afirma que ella es indemostrable, al ser incorrecta la proposición resultaría demostrable y, por lo tanto, **no refutable**.

Por último, cabe considerar brevemente la idea que preside la demostración del hecho de que la ausencia de contradicción en un sistema formalizado (S) no puede ser demostrada con los medios lógicos de que se dispone en (S).

Al demostrar que W_q (q) es indecidible en (S) se ha supuesto que (S) se halla libre de contradicciones.

En consecuencia se puede formular ese resultado de la siguiente manera:

"Si (S) no es contradictorio, entonces W_q (q) es indecidible en (S)". Ahora bien, la proposición de que (S) no es contradictorio puede ser formulada en (S) mismo. Designemos la propisición así formulada mediante WF (Widerspruchfrei), siguiendo a BECKER. Asimismo, es indecidible en (S) la proposición "W_q (q) es indemostrable en (S)" ya que esta es la proposición W_q (q) misma. Supongamos ahora que en (S) pueda demostrarse

(3) "WF $\Rightarrow$ W_q (q)"

(La ausencia de contradicciones en (S) implica W_q (q)), **habiéndose demostrado previamente dentro del marco de (S) que éste se halla libre de contradicciones, suponiendo que esto sea posible.**

Esta última demostración de no-contradicción de (S) sólo puede emplear los medios lógicos del sistema mismo. Al lograrse esto último, repetimos la demostración de GOEDEL dentro del marco de (S), lo que es factible, y resulta (3). Pero de esto resulta que W_q (q) queda demostrado, lo cual contradice al resultado principal de GOEDEL según el cual W_q (q) es indemostrable en (S). Esta contradicción provino de suponer que existe una demostración de la no-contradicción de (S) dentro de (S) mismo.

V. Conclusiones

El teorema de GOEDEL es, sin duda, la dificultad más seria (en cuanto a sus implicancias) con que hayan tropezado la Lógica y la Matemática en toda su historia. Esto desde luego es mucho decir pero, valga la expresión, **no quiere decir más que eso.**

Es menester ser cuidadoso para precisar cuáles son las consecuencias filosóficas que no tiene, aunque haya otras que sí vale la pena mencionar. Dicen al respecto NAGEL y NEWMAN[4]: el teorema que nos ocupa "no debe ser interpretado como una invitación a la desesperación o una excusa para los mercaderes de misterios. El descubrimiento de que hay verdades **aritméticas*** que no pueden ser demostradas formalmente no significa que haya (en este campo) verdades que seamos eternamente incapaces de conocer".

En consecuencia resultaría sensato asignar al resultado que nos ocupa la importancia real que tiene sin pretender extrapolar más de lo justo.

El caso es que GOEDEL mismo** señala, con clara posición platónica e idealista, que los conceptos y conjuntos pueden ser concebidos como entes reales y existentes, independientemente de las definiciones y construcciones lógicas que en relación a ello podamos idear. A esta concepción, que compartimos plenamente, podemos agregar que si tales definiciones y construcciones se revelan imperfectas o insuficientes, nada nos impide creer que tal vez el hombre logrará alguna vez sustituirlas por otras más perfectas y eficaces.

Como corolario interesante es además preciso señalar con NAGEL y NEWMAN[4] que el teorema de GOEDEL implica que jamás podrá existir una máquina lógica que resuelva (en el sentido de decidir lógicamente) todas las proposiciones de la aritmética. Esto es indudablemente cierto en el estado actual de la Ciencia.

En efecto, cualquiera sea el conjunto de postulados en que la hipotética máquina se basa, existirían proposiciones indecidibles para ella, en virtud del resultado analizado.

No obstante ello, y como ya se ha dicho, es factible que surjan nuevos edificios lógicos o metalógicos para los cuales esta conclusión negativa carezca de validez.

No es posible concluir este trabajo sin una mención somera de las consecuencias que tienen los resultados de GOEDEL en el campo filosófico. Desde luego, la obra de GOEDEL se refiere a la lógica y a los sistemas formales suficientemente amplios como para contener la aritmética. Cabe preguntarse qué sucederá si excluimos la aritmética y nos limitamos a la lógica aristotélica. Aun reducidos a este campo, aparecen dificultades muy serias pues no hay resultados que garanticen la **saturación** y la **coherencia** más allá de la lógica de predicados de primer orden. La saturación semántica absoluta de esta lógica (en el sentido de que en ella toda proposición es derivable o refutable) fue demostrada por K. GOEDEL mismo pero empleando recursos que hacen no enteramente constructivo a su argumento. En cambio, no está resuelto el problema de la **decisión** (también llamado de la resolubilidad): no

* La negrita es nuestra.

** C.f.r. Nagel y Newman (4), pág. 102.

se sabe aún si en la lógica de predicados de primer orden toda proposición es derivable o si no lo es.

Luego, puede suceder que aparezcan proposiciones indecidibles y, con mayor razón, en el de la lógica de predicados de cualquier orden superior. Naturalmente si la base axiomática es lo suficientemente amplia como para abarcar la aritmética caeremos ineludiblemente en el caso de GOEDEL. La **coherencia** (o consistencia lógica en el sentido de ausencia de contradicciones) ha sido establecida por HILBERT y ACKERMANN para la lógica de predicados de primer orden, pero tampoco se ha ido aquí más lejos.

Ahora bien, todo lo anterior permite sospechar (como lo hacen NAGEL y NEWMAN) que el cerebro humano tenga limitaciones incorporadas a su estructura misma y que, por lo tanto, haya problemas lógicos que seamos incapaces de resolver. Y por lo tanto toda pretensión de formalizar el conocimiento por vía racional exclusivamente está condenada por siempre al fracaso. Y esta conclusión final negativa hay ahora que conectarla con obvias limitaciones que hacen al punto de partida: ¿acaso no debemos postular propiedades por nuestra incapacidad para definir entes en su esencia?

Supongamos ahora que, a la manera de los escolásticos, alguien deseara encerrar todo el saber humano en un sistema formal.

Está claro que el sistema de postulados debería ser lo bastante amplio como para contener la aritmética y las reglas de inferencia de la lógica, además de todas aquellas proposiciones que cabría denominar "primeros principios", pues no pueden ser deducidas lógicamente de otras. Como tales tenemos las propiedades básicas de los entes de razón, los hechos y datos experimentales correspondientes a las distintas ciencias, los principios de la ética y la moral e, incluso, los dogmas de Fe que forman la materia de la Revelación. En una visión pregöedeliana un tal sistema formal, a pesar de sus dimensiones colosales, constituiría el desideratum, pues de él se desprendería lógicamente todo el conocimiento humano actual. Al obtenerse nuevos datos experimentales de cualquier clase o al crearse nuevos entes de razón, bastaría adjuntar nuevos postulados para actualizar el sistema formal y permitir ampliar o bien revisar tan ingente construcción lógica. El resultado de GOEDEL viene a mostrarnos que tal empresa es utópica en el sentido de que aparecerán siempre nuevas proposiciones indecidibles y que lo mismo es cierto aun cuando se limite tal sistema formal a grupos de disciplinas particulares bajo las condiciones que antes se han puntualizado.

Las consecuencias de este hecho capital se presentan en una doble vertiente. Por un lado, tenemos la decepción de no poder formalizar el conocimiento humano ni en su totalidad ni siquiera parcialmente. Por otro lado, cabe una interesante reflexión que es la siguiente. Supongamos un sistema formal lo bastante amplio en sus postulados como para contener la aritmética y las reglas de inferencia de la lógica formal y, por otra parte, los dogmas de la Fe como postulados. Está claro, por una parte, que la inclusión de la aritmética sólo apunta a poder formalizar el sistema de acuerdo a lo antes visto. El hecho es que el sistema padecerá de incomplección en el sentido de la aparición de proposiciones indecidibles. Y aquí entonces se impone la siguiente reflexión. Si no es posible lograr decidir todas las cuestiones teológicas con el solo concurso de la razón y la lógica a partir de los dogmas de Fe, ello precisamente implica poner nuevamente de manifiesto las limitaciones de la razón humana, las que son inherentes a la estructura misma de esta última. Este corolario evidente nos debe mover a buscar en la Fe posibilidades de trascendencia que la sola lógica no puede ofrecernos ni aun cuando (y paradójicamente) queremos aplicarla a cuestiones propias de aquélla. Aun apoyándose en la Revelación y en el Magisterio de la Iglesia, el ser humano **por sus solas fuerzas** no puede ir muy lejos. Pero le restará por siempre la posibilidad de ser socorrido en este empeño por el Misterio de la Gracia. En todo caso, conviene recordar con San Bernardo de Clairvaux que Dios nos ha dado dos alas para volar hasta El: el amor y la humildad. Y la razón, por lo visto, no puede pretender reemplazar a ninguna de dichas alas para llegar al Conocimiento Supremo. Hacer Teología en base a especulaciones filosóficas y argucias dialécticas no sólo es la manifestación del orgullo como decía el mismo San Bernardo sino que tampoco permite lograr demasiado...

BIBLIOGRAFIA

(1) GOEDEL, K. "Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systema", en: **Monatshefte fur Mathematik und Physik**, 38, 1931, págs. 173-98. Versión castellana en: **Obras completas de K. Göedel**, Madrid, Ed. Alianza, 1981, págs. 89-95.
(2) POINCARE, H., **Ciencia y Método** Madrid, col. Austral, 1963.
(3) RICHARD, J. "Lettre à l'editeur". **Revue Génerale des Sciences**, XVI, Nº 12, p. 541, 30-6-1905. Reproducida en: **Acta Mathematica**, Estocolmo, 1912.
(4) NAGEL, E.; NEWMAN, J.R. **La Prova di Göedel**. Torino, Paolo Boringhieri, 1961. Versión cast. en NEWMAN, J.R. (comp.) **Matemática, Verdad, Realidad**. Barcelona, 1969, pp. 79-116.
(5) BECKER, O. **Grösse und Grenze der mathematischen Denken**, Freiburg-München, K. Alberg, 1959. Edición castellana: Madrid, Rialp, 1966.
(6) LADRIERE, J. **Les Limitations Internes des Formalismes**, París, Nawelaerts -Gauthier-Villars, 1957.
(7) MOSTOWSKI - C.f.r. BECKER, l.c. supra.
(8) ROSSER, J.B. "An informal exposition of proofs of GOEDEL'S theorem and CHURCH's theorem", en: **Journal of Symbolic Logic**, 4, 1939, pp. 53-60.
(9) BOAS, G. **The limits of reason**, Londres, Routledge and Kegan Paul, 1961.